ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СТАВРОПОЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра «Математика»

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Учебное пособие

Ставрополь 2019

УДК 51 (075.8)
ББК 22.1я73

Литвин, Д.Б.

Теория вероятностей: учебное пособие / Д. Б. Литвин; – Ставропольский гос. аграрный университет. - Ставрополь, 2019. – 80 с.

Пособие предназначено для студентов, обучающихся по направлению 38.03.01 - Экономика. Содержание материала в целом соответствует первой части дисциплины «Теория вероятностей и математическая статистика».

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В настоящем пособии представлен теоретический материал и задачи по следующим темам: алгебра случайных событий; элементы комбинаторики; основные теоремы теории вероятностей; случайные величины и векторы, их законы распределения; числовые характеристики случайных величин и векторов.

Пособие может использоваться на всех направлениях подготовки, где предусмотрен раздел (дисциплина) «Теория вероятностей и математическая статистика».

1 Случайные события и их вероятности

1.1 Случайные события. Алгебра событий

Опыт (эксперимент, испытание) - некоторая воспроизводимая совокупность условий, в которых наблюдается то или другое явление, фиксируется тот или другой результат.

Случайным событием называется всякий факт, который в результате опыта может произойти или не произойти.

События будем обозначать большими буквами латинского алфавита A, B, C и т.д.

Пусть имеется некоторое испытание. Свяжем с ним такую совокупность простейших исходов, чтобы в результате испытания осуществлялся один и только один из этих исходов. *Такое множество исходов называется* ***пространством элементарных событий***, связанных с рассматриваемым испытанием, а входящие в множество исходы – ***элементарными событиями.***

Пространство элементарных событий будем обозначать Ω, а его точки – ω.

При этом, ни одно из элементарных событий нельзя представить в виде совокупности более простых. Тогда любое случайное событие A представимо в виде подмножества элементарных событий, ***благоприятствующих*** этому событию.

Пример. Бросают игральную кость. Пусть ω_k - появление на кости k очков ($k = \overline{1,6}$). Очевидно, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_6\}$. Рассмотрим некоторые события:

$A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$ - состоящее в появлении нечётного числа очков;

$B = \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\}$ - появление числа очков кратных двум;

$C = \{\omega_5\}$ - появление на игральной кости 5 очков.

Два события называются ***противоположными***, если появление одного из них равносильно непоявлению другого. Так, противоположными являются события "герб" и "цифра" при одном подбрасывании симметричной монеты. Если одно из противоположных событий обозначено буквой A, то другое обозначают $\overline{A}$.

Достоверное событие это событие, которое происходит всякий раз при данном испытании. Оно объединяет все точки пространства элементарных событий Ω и обозначается той же буквой Ω.

Под ***невозможным*** событием понимается событие, которое не может произойти в результате данного опыта. Оно не содержит ни одного элементарного события из данного пространства Ω. Невозможное событие будем обозначать $\varnothing$ или $\overline{\Omega}$.

Два события называются ***несовместными***, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании. Например, попадание и промах при одном выстреле. В противном случае события называются ***совместными***.

События $A_1, A_2, \ldots, A_n \left(n \geq 2\right)$ называются попарно несовместными, если любые два из них несовместны.

Множество событий $A_1, A_2, \ldots, A_n \left(n \geq 2\right)$ называют ***полной группой событий***, если они попарно-несовместны, а появление одного и только одного из них является достоверным событием.

Полной группой событий всегда являются пространство элементарных событий Ω, а также совокупность противоположных событий $\left\{A, \overline{A}\right\}$.

События считают ***равновозможными***, если нет оснований полагать, что одно событие является более возможным, чем другие.

Произведением (пересечением) событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие *A*, заключающееся в появлении всех событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (оператор И). Обозначается $A = \prod_{i=1}^{n} A_i$, или $A = A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Произведение несовместных событий - невозможное событие (см. рисунок 1).

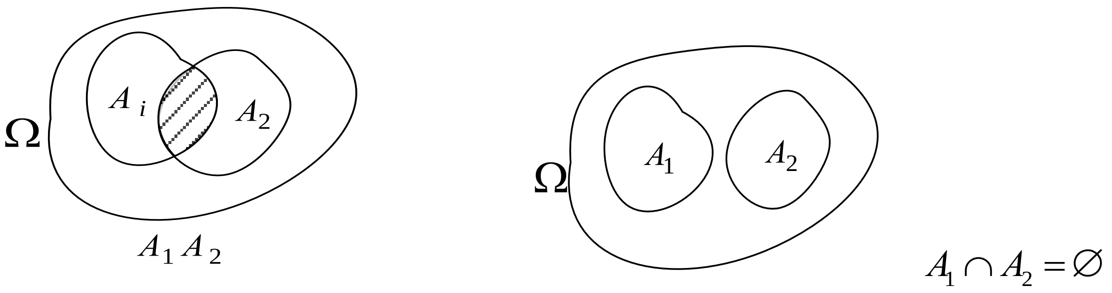


Рисунок 1 - Произведение (пересечение) событий

Суммой (объединением) событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие *A*, заключающееся в появлении хотя бы одного из событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ (оператор ИЛИ). Обозначается $A = \sum_{i=1}^{n} A_i$, или $A = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (см. рисунок 2).

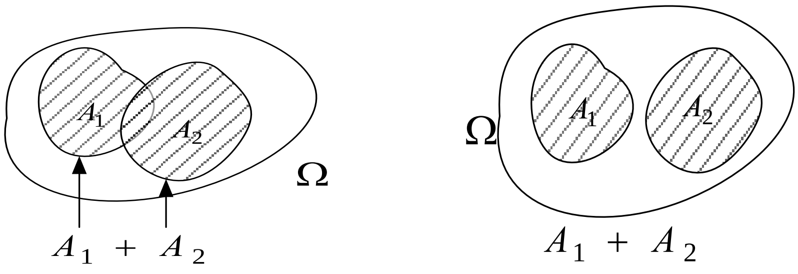


Рисунок 2 - Сумма (объединение) событий

ЗАДАЧИ

1. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма выпавших очков, которая может меняться от 2 до 12. Записать пространство элементарных исходов Ω и полную группу событий в этом опыте.

2. Подбрасывается два игральных кубика. Какому событию благоприятствует больше элементарных исходов: "сумма выпавших очков равна 7", "сумма выпавших очков равна 8"?

3. Среди студентов, собравшихся на лекцию по теории вероятностей, выбирают наудачу одного. Пусть событие A заключается в том, что он — юноша. Событие B - в том, что он не курит, а событие C - в том, что он живет в общежитии.

   а) Описать событие $AB\overline{C}$.

   б) При каком условии будет иметь место тождество $ABC = A$?

   в) Когда будет справедливо соотношение $\overline{C} \subseteq B$?

   г) Когда будет верно равенство $\overline{A} = B$, будет ли оно иметь место, если все юноши курят?

4. Пусть A, B и C — три произвольно выбранных события. Найти выражения для событий, состоящих в том, что из A, B и C:
   а) произошло только A;
   б) произошли A и B, но C не произошло;
   в) все три события произошли;
   г) произошло хотя бы одно из этих событий;
   д) произошло хотя бы два события;
   е) произошло одно и только одно из этих событий;
   ж) произошло два и только два события;
   з) ни одно из событий не произошло;
   и) произошло не более двух событий.

1.2 Классический способ подсчета вероятностей

Вероятность события A определяется отношением

$$P(A)=\frac{m}{n},$$

где m — число элементарных исходов испытания, благоприятствующих появлению события A;

n — общее число равновозможных элементарных исходов испытания.

Вероятность события есть неотрицательная величина, изменяющаяся в пределах: [0; 1].

Указать ошибку «решения» задачи: брошены две игральные кости; найти вероятность того, что сумма выпавших очков равна 3 (событие А).

Решение. *Возможны два исхода испытания: сумма выпавших очков равна 3, сумма выпавших очков не равна 3. Событию А благоприятствует один исход; общее число исходов равно двум. Следовательно, искомая вероятность* $P(A)=1/2$.

Ошибка этого «решения» состоит в том, что рассматриваемые исходы не являются равновозможными.

Правильное решение. *Общее число равновозможных исходов равно* $6\cdot 6=36$ *(каждое число очков, выпавших на одной кости, может сочетаться со всеми числами очков, выпавших на другой кости). Среди этих исходов благоприятствуют событию А только два исхода (в скобках указаны числа выпавших очков); (1;2) и (2;1) Следовательно, искомая вероятность* $P(A)=2/36=1/18$.

ЗАДАЧИ

1. В коробке лежат внешне одинаковые конфеты, из которых a штук с шоколадной начинкой, а b — с фруктовой. Из коробки вынута одна конфета. Найти вероятность того, что она с шоколадной начинкой.

2. Пусть на кону лежит карта — валет треф, а козыри пики. Найти вероятность того, что наудачу взятой из колоды картой карта, лежащая на кону, будет бита.

3. Задумано двузначное число. Найти вероятность того, что задуманным числом окажется:
   а) случайно названное двузначное число;

   б) случайно названное двузначное число, цифры которого различны.

4. Брошены две игральные кости. Найти вероятности следующих событий:
   а) сумма выпавших очков равна семи;

   б) сумма выпавших очков равна восьми, а разность — четырем;

   в) сумма выпавших очков равна восьми, если известно, что их разность равна четырем;

   г) сумма выпавших очков равна пяти, а произведение — четырем.

5. Некто купил два лотерейных билета. Каковы вероятности того, что выиграют 0, 1 или 2 билета?

6. Одновременно бросаются две монеты. Найти вероятность того, что выпадет
   а) два «герба»,
   б) «герб» и надпись,
   в) две надписи,
   г) хотя бы один раз появится «герб».

7. Куб, все грани которого окрашены, распилен на тысячу кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик имеет окрашенных граней:
   а) одну;

   б) две;

   в) три.

8. Какова вероятность того, что наудачу взятую кость домино можно приставить к данной: (2; 5)? (Всего в наборе 28 костяшек).

1.3 Элементы комбинаторики

На основе правил произведения и сложения событий определяют соответствующие правила подсчёта количества способов выполнения действия.

Правило умножения. Если действие *A* можно совершить n способами, а действие *B* – k способами, то последовательное выполнение действия «*и A, и B*» можно совершить nk способами.

Правило сложения. Если действие *A* можно совершить n способами, а действие *B* – k способами, то выполнение действия «*или A, или B*» можно совершить $n+k$ способами.

По виду комбинации (соединения) делятся на перестановки, размещения и сочетания. А по типу исходного множества элементов на комбинации (соединения) без повторений и с повторениями.

Пусть задано ***множество А из n различных элементов.*** Элементы можно перенумеровать целыми числами от 1 до n.

Перестановкой P_n **из *n* элементов** называется любое упорядочение (расположение в ряд) всех *n* элементов множества. Различные перестановки отличаются друг от друга только порядком расположения в них элементов.

Число всех возможных перестановок

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n! \tag{1}$$

Размещением A_n^m **по *m* из *n* элементов** называется любое упорядоченное подмножество из *m* элементов множества, состоящего из *n* различных элементов. Размещения отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их следования. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{2}$$

$$P_n = A_n^n = n!$$

Сочетанием C_n^m **по *m* из *n* элементов** называется любое неупорядоченное подмножество из *m* элементов множества, содержащего из *n* различных элементов. Сочетания отличаются друг от друга только составом элементов. Число всех возможных сочетаний

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}. \tag{3}$$

Свойства сочетаний (треугольник Паскаля):

$$C_n^0 = 1; \quad C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}; \quad C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n; \quad C_n^m = C_n^{n-m}. \tag{4}$$

Сочетания также являются коэффициентами биномиального разложения

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i \text{, например, } (a+b)^2 = C_2^0 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^2 a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Рассмотрим теперь ***множество A с повторяющимися элементами***. Пусть в нем есть *k1* элементов 1-го типа, *k2* – 2-го типа, …, *km* – *m*-го типа, а общее количество элементов равно

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n.$$

Перестановкой с повторениями называется перестановка, в которой элементы одного типа неразличимы. Тогда число всех возможных перестановок

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!} \tag{5}$$

При определении размещений и сочетаний с повторениями различают несколько схем выбора. Мы будем полагать, что исходное множество *A* попрежнему состоит ***из n различных элементов***, однако после выбора очередного элемента он возвращается обратно, т.е. любой элемент можно выбирать любое количество раз.

Размещение с повторениями $\tilde{A}_n^m$ – упорядоченный набор из m элементов множества, состоящего из n различных элементов, с возвращением. На каждом из m шагов выбора существует n возможных вариантов, при этом допустимо, что $m > n$. Размещения отличаются друг от друга либо составом элементов, либо порядком их следования. Число всех возможных размещений с повторениями

$$\tilde{A}_n^m = n^m \tag{6}$$

Сочетание с повторениями $\tilde{C}_n^m$ – неупорядоченный набор из m элементов множества, состоящего из n различных элементов, с возвращением. На каждом из m шагов выбора существует n возможных вариантов, при этом допустимо, что $m > n$. Сочетания отличаются друг от друга только составом элементов. Число всех возможных сочетаний с повторениями

$$\tilde{C}_n^m = C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1} \tag{7}$$

Пример 1. *Каждая кость домино помечается двумя числами. Сколько различных костей можно образовать, используя числа 1, 2,* $\cdots$*, n?*

Решение. *Кости симметричны, числа в парах не упорядочены, поэтому выбираем по два, можно повторяющихся, числа из доступных n чисел:*

$$N_n = \tilde{C}_n^2 = C_{n+2-1}^2 = C_{n+1}^2, \textit{ например, } N_7 = \tilde{C}_7^2 = C_8^2 = \frac{8\cdot 7}{2} = 28.$$

Пример 2. *В цехе работают шесть мужчин и четыре женщины. По табельным номерам наудачу отобраны семь человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажутся три женщины.*

Решение. *Порядок отбора не учитывается, поэтому используем сочетания. Всего число равновозможных исходов* $C_{10}^7 = \dfrac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2} = 120$. *Событию благоприятствуют количество способов выбора трех женщин из четырех* $C_4^3 = 4$ ***И*** *четырех мужчин из шести* $C_6^4 = \dfrac{6\cdot 5}{2} = 15$, *всего* $C_4^3 C_6^4 = 60$. *Искомая вероятность* $P(A) = \dfrac{C_4^3 C_6^4}{C_{10}^7} = 0,5$.

ЗАДАЧИ

1. Сколькими способами можно расставить в одну шеренгу 6 человек?

2. В коробке шесть одинаковых, занумерованных кубиков. Наудачу по одному извлекают все кубики. Найти вероятность того, что номера извлеченных кубиков появятся в возрастающем порядке.

3. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

4. Числа $1, 2, \cdots, n$ расположены в случайном порядке. Найти вероятность того, что числа расположены рядом в указанном порядке:

   а) 1 и 2;

   б) 1, 2 и 3.

5. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах:
   замок,
   ротор,
   топор,
   колокол?

6. На пяти одинаковых карточках написаны буквы И, К, М, Н, С. Карточки перемешиваются и наугад раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово МИНСК?

7. В «секретном» замке на общей оси четыре диска, каждый из которых разделен на пять секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

8. Игральный кубик подбрасывают 3 раза. Какова вероятность того, что выпадут:
   а) 5, 2 и 4 в указанной последовательности?
   б) 5, 2 и 4 в произвольной последовательности?
   в) 5, 5, 2 в произвольной последовательности?

9. Игральный кубик подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что при этом грани 1, 2, 3, 4, 5, 6 выпадут соответственно 2,3, 1, 1, 1, 2 раза (событие A)?

10. В конверте среди 100 фотокарточек находится две разыскиваемых. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется:
    а) две нужных;

    б) одна нужная;

    в) ни одной нужной.

11. Устройство состоит из пяти элементов, из которых два изношены. При включении устройства включаются случайным образом два элемента. Найти вероятность того, что включенными окажутся неизношенные элементы.

12. Набирая номер телефона, абонент забыл последние три цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

13. В группе 12 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что среди отобранных студентов пять отличников.

1.3 Геометрическая вероятность

Если множество элементарных событий Ω является непрерывным и состоит из бесконечного числа точек - равновозможных элементарных исходов, то используется геометрическое определение вероятности.

Пусть отрезок l составляет часть отрезка L. На отрезок L наудачу поставлена точка. Если предположить, что вероятность попадания точки на отрезок l пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения относительно отрезка L, то вероятность попадания точки на отрезок l определяется отношением длин отрезков.

Аналогично определяется вероятность попадания точки в площадную и пространственную фигуры:

$$P = l/L; \quad P = s/S; \quad P = v/V.$$

Пример. *Задача Бюффона (французский естествоиспытатель* XVIII *в.). Плоскость разграфлена параллельными прямыми, отстоящими друг от друга на расстоянии 2а. На плоскость наудачу бросают иглу длины* $2l\left(l < a\right)$*. Найти вероятность того, что игла пересечет какую-нибудь прямую.*

Решение. *Введем следующие обозначения: x — расстояние от середины иглы до ближайшей параллели;* φ *— угол, составленный иглой с i-той параллелью (рисунок 3а).*

Положение иглы полностью определяется заданием определенных значений x и φ *причем x принимает значения от 0 до a; возможные значения* φ *изменяются от 0 до* π*. Другими словами, середина иглы может попасть в любую из точек прямоугольника со сторонами a и* π *(рисунок 3б).*

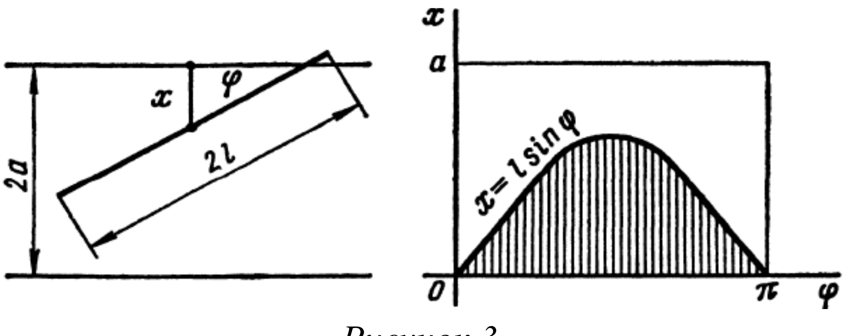


Рисунок 3

Таким образом, этот прямоугольник можно рассматривать как фигуру G, точки которой представляют собой все возможные положения середины иглы. Очевидно, площадь фигуры $S=\pi a$*.*

Найдем теперь фигуру g, каждая точка которой благоприятствует интересующему нас событию, т. е. каждая точка этой фигуры может слу-

жить серединой иглы, которая пересекает ближайшую к ней параллель. Как видно из рисунка 3а, игла пересечет ближайшую к ней параллель при условии $x \le l \sin\varphi$, *т. е, если середина иглы попадет в любую из точек фигуры, заштрихованной на рисунке 3б.*

Таким образом, заштрихованную фигуру можно рассматривать как фигуру g. Найдем площадь этой фигуры:

$$s = \int_0^{\pi} l \sin\varphi d\varphi = -l \cos\varphi |_0^{\pi} = 2l$$

Искомая вероятность того, что игла пересечет прямую:

$$P = \frac{s}{S} = \frac{2l}{\pi a}.$$

ЗАДАЧИ

1. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 5 и 10 *см* соответственно. Найти вероятность того, что точка, брошенная наудачу в большой круг, попадет также и в кольцо, образованное построенными окружностями. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади этой фигуры и не зависит от ее расположения.

2. В круг радиуса R помещен меньший круг радиуса r. Найти вероятность того, что точка, наудачу брошенная в большой круг, попадет также и в малый круг. Предполагается, что вероятность попадания точки в круг пропорциональна площади круга и не зависит от его расположения.

3. Плоскость разграфлена параллельными прямыми, находящимися друг от друга на расстоянии $2a$. На плоскость наудачу брошена монета радиуса $r < a$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из прямых.

4. На плоскость с нанесенной сеткой квадратов со стороной a наудачу брошена монета радиуса $r < a/2$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадрата. Предполагается, что вероятность попадания точки в плоскую фигуру пропорциональна площади фигуры и не зависит от ее расположения.

5. На отрезок OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлена точка B(x). Найти вероятность того, что меньший из отрезков OB и BA имеет длину, большую, чем $L/3$. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

6. На отрезке OA длины L числовой оси Ox наудачу поставлены две точки: $B(x)$ и $C(y)$, причем $y \geq x$ Найти вероятность того, что длина отрезка BC меньше длины отрезка OB. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине этого отрезка и не зависит от его расположения на числовой оси.

7. На отрезок единичной длины бросают наудачу две точки. Они разбивают отрезок на три части. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно построить треугольник?

8. Задача о встрече. Два студента условились встретиться в определенном месте между 12 и 13 часами дня. Пришедший первым ждет второго в течение 1/4 часа, после чего уходит. Найти вероятность того, что встреча состоится, если каждый студент наудачу выбирает момент своего прихода (в промежутке от 12 до 13 часов).

9. Наудачу взяты два положительных числа x и y, каждое из которых не превышает двух. Найти вероятность того, что произведение xy будет не больше единицы, а частное y / x не больше двух.

1.4 Статистическая вероятность

Относительной частотой события (частотой), называется отношение

$$W\left(A\right)=\frac{m}{n}, \tag{8}$$

где m — число испытаний, в которых событие A наступило;

n — общее число произведенных испытаний.

Эмпирически установлено, что относительная частота обладает свойствами статистической устойчивости: в различных сериях испытаний она принимает значения, достаточно близкие к некоторой постоянной.

Эту постоянную, являющуюся объективной числовой характеристикой явления, считают вероятностью данного события.

Статистической вероятностью события называется число, около которого группируются значения частот данного события в различных сериях большого числа испытаний.

1. Отдел технического контроля обнаружил пять бракованных книг в партии из случайно отобранных 100 книг. Найти относительную частоту появления бракованных книг.

2. При испытании партии приборов относительная частота годных приборов оказалась равной 0,9. Найти число годных приборов, если всего было проверено 200 приборов.

1.5 Вероятность суммы и произведения событий

Теорема умножения вероятностей

Вероятность события B при условии, что произошло событие A, называется ***условной вероятностью*** *события B* и обозначается так:

$$P\left(B/A\right) \text{ или } P_A\left(B\right).$$

Вероятность совместного появления двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную в предположении, что первое событие уже наступило:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B/A)=P(B)\cdot P(A/B), \tag{9}$$

откуда

$$P(A/B)=\frac{P(A\cdot B)}{P(B)}; \qquad P(B/A)=\frac{P(A\cdot B)}{P(A)}. \tag{10}$$

Условие независимости событий:

$$P(A/B)=P(A). \tag{11}$$

Для независимых событий

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P(B). \tag{12}$$

Теоремы сложения вероятностей

Вероятность появления одного из нескольких *попарно несовместных* событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C). \tag{13}$$

Вероятность появления хотя бы одного из двух *совместных* событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления (рисунок 2):

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

По определению $P(A)+P(\bar{A})=1$, откуда ***вероятность противоположного события***

$$P(\bar{A})=1-P(A). \tag{14}$$

Если обозначить $P(A)=p;\ P(\bar{A})=q$, то $q=1-p$.

Поскольку для суммы событий $A=A_1+A_2+...+A_n$ - произойдет хотя бы одно, противоположным является произведение частных противоположных событий $\bar{A}=\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot...\cdot\bar{A}_n$ - не произойдет ни одно из событий, то имеем

$$P\left(A_1+A_2+...+A_n\right)=1-P\left(\bar{A}_1\cdot\bar{A}_2\cdot...\cdot\bar{A}_n\right). \tag{15}$$

В частности, если события $A_1,A_2,...,A_n$ *независимы, то*

$$P\left(A_1+A_2+...+A_n\right)=1-P\left(\bar{A}_1\right)\cdot P\left(\bar{A}_2\right)\cdot...\cdot P\left(\bar{A}_n\right)=1-q_1q_2...q_n, \tag{16}$$

а если события $A_1,A_2,...,A_n$ *независимы и равновероятны, то*

$$P\left(A_1+A_2+...+A_n\right)=1-q^n. \tag{17}$$

ЗАДАЧИ

1. Студент пришел на экзамен, зная лишь 20 из 25 вопросов программы. Экзаменатор задал студенту 3 вопроса. Используя понятие условной вероятности, найти вероятность того, что студент знает все эти вопросы.

2. Среди 100 лотерейных билетов есть 5 выигрышных. Найти вероятность того, что 2 наудачу выбранные билета окажутся выигрышными

3. В ящике 10 деталей, среди которых шесть окрашенных. Сборщик наудачу извлекает четыре детали. Найти вероятность того, что все извлеченные детали окажутся окрашенными.

4. В урне имеется пять шаров с номерами от 1 до 5. Наудачу по одному извлекают три шара без возвращения. Найти вероятности следующих событий:
   а) последовательно появятся шары с номерами 1, 4, 5;

   б) извлеченные шары будут иметь номера 1, 4, 5 независимо от того, в какой последовательности они появились.

5. Разыскивая специальную книгу, студент решил обойти три библиотеки. Для каждой библиотеки одинаково вероятно, есть в ее фондах книга или нет. И если книга есть, то одинаково вероятно, занята она другим читателем или нет. Что более вероятно — достанет студент книгу или нет, если известно, что библиотеки комплектуются независимо одна от другой?

Пример. *На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлено 15 учебников, причем пять из них в переплете. Библиотекарь берет наудачу три учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется в переплете (событие А).*

Решение. Первый способ. *Требование — хотя бы одни из трех взятых учебников в переплете — будет осуществлено, если произойдет любое из следующих трех несовместных событий: B — один учебник в переплете, C — Два учебника в переплете, D — три учебника в переплете.*

Интересующее нас событие A можно представить в виде суммы событий: $\mathrm{A} = \mathrm{B} + \mathrm{C} + \mathrm{D}$. *Найдем вероятности событий B, C и D:*

$$P(B) = \frac{\mathrm{C}_5^1 \cdot \mathrm{C}_{10}^2}{\mathrm{C}_{15}^3} = \frac{5 \cdot 10 \cdot 9}{2} \cdot \frac{3!}{15 \cdot 14 \cdot 13} = \frac{5 \cdot 45}{5 \cdot 7 \cdot 13} = \frac{45}{91},$$

$$P(C) = C_5^2 \cdot \mathrm{C}_{10}^1 / \mathrm{C}_{15}^3 = 20/91, \; P(D) = C_5^3 / C_{15}^3 = 2/91.$$

По теореме сложения (13)*, окончательно получим*

$$P(A) = 45/91 + 20/91 + 2/91 = 67/91.$$

Второй способ. *Событие A (хотя бы один из взятых трех учебников имеет переплет) и* $\overline{\mathrm{A}}$ *(ни один из взятых учебников не имеет переплета) — противоположные. Вероятность появления события* $\overline{A}$

$$P(\overline{A}) = C_{10}^3 / C_{15}^3 = 24/91.$$

Искомая вероятность, на основании (14)

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 24/91 = 67/91.$$

1. В ящике 10 деталей, из которых четыре окрашены. Сборщик наудачу взял три детали. Найти вероятность того, что хотя бы одна из взятых деталей окрашена.

2. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,7, а для второго — 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе в мишень попадает только один из стрелков.

3. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,38. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,8.

4. Из партии изделий товаровед отбирает изделия высшего сорта. Вероятность того, что наудачу взятое изделие окажется высшего сорта, равна 0,8. Найти вероятность того, что из трех проверенных изделий только два изделия высшего сорта.

5. Вероятность попадания в мишень стрелком при одном выстреле равна 0,8. Сколько выстрелов должен произвести стрелок, чтобы с вероятностью, меньшей 0,4, можно было ожидать, что не будет ни одного промаха?

6. Вероятность того, что при одном измерении некоторой физической величины будет допущена ошибка, превышающая заданную точность, равна 0,4. Произведены три независимых измерения. Найти вероятность того, что только в одном из них допущенная ошибка превысит заданную точность.

7. Устройство состоит из трех элементов работающих независимо. Вероятности безотказной работы (за время t) первого, второго и третьего элементов соответственно равны 0,6; 0,7; 0,8. Найти вероятности того, что за время t безотказно будут работать:

   а) только один элемент;

   б) только два элемента;

   в) все три элемента.

8. Устройство содержит два независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятности отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

9. Для разрушения моста достаточно попадания одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него сбросить четыре бомбы, вероятности попадания которых соответственно равны: 0,3; 0,4; 0,6; 0,7.

10. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при четырех выстрелах равна 0,9984. Найти вероятность попадания в цель при одном выстреле.

1.6 Формула полной вероятности. Формула Байеса

Формула полной вероятности

Вероятность события *A*, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу, равна сумме произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующую условную вероятность события *A*:

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n), \quad (18)$$

где $P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1.$

Формула Байеса применяется для переоценки вероятностей гипотез в предположении, что некоторое событие A уже произошло.

Пусть событие *A* может наступить лишь при условии появления одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, которые образуют полную группу событий. Если событие *A* уже произошло то вероятности гипотез могут быть переоценены по *формуле Байеса*

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) \cdot P(A/H_i)}{P(A)}, \quad (i = 1, 2, ..., n). \quad (19)$$

где

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + ... + P(H_n) \cdot P(A/H_n).$$

Пример. *По данным переписи населения (1891 г.) Англии и Уэльса установлено: темноглазые отцы и темноглазые сыновья (AB) составили 5% обследованных лиц, темноглазые отцы и светлоглазые сыновья ($A\overline{B}$) — 7,9%, светлоглазые отцы и темноглазые сыновья ($\overline{A}B$) — 8,9%, светлоглазые отцы и светлоглазые сыновья ($\overline{AB}$) — 78,2%. Найти связь между цветом глаз отца и сына.*

Решение. *По условию,* $P\left(AB\right)=0,05$; $P\left(A\overline{B}\right)=0,079$; $P(\overline{A}B)=0,089$: $P\left(\overline{A}\overline{B}\right)=0,782$

Найдем условную вероятность того, что сын темноглазый, если отец темноглазый:

$$P_A(B)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(AB)}{P(AB)+P(A\overline{B})}=\frac{0,05}{0,05+0,079}=0,39.$$

Найдем условную вероятность того, что сын светлоглазый, если отец темноглазый:

$$P_A\left(\overline{B}\right)=1\text{-}P_A\left(B\right)=1\text{-}0,39=0,61.$$

Найдем условную вероятность того, что сын темноглазый, если отец светлоглазый:

$$P_{\overline{A}}(B)=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A})}=\frac{P(\overline{A}B)}{P(\overline{A}B)+P(\overline{A}\overline{B})}=\frac{0,089}{0,089+0,782}=0,102.$$

Найдем условную вероятность того, что сын светлоглазый, если отец светлоглазый:

$$P_{\overline{A}}(\overline{B})=1-P_{\overline{A}}(B)=1-0,102=0,898.$$

ЗАДАЧИ

1. Пусть имеется три урны с белыми и черными шарами. В первой урне содержатся 3 черных и 2 белых шара, во второй — 2 черных и 2 белых, а в третьей — 5 черных и 4 белых. Наудачу выбирается урна и из нее наудачу выбирается шар. Найти вероятность того, что выбранный шар — белый.

2. В пирамиде пять винтовок, три из которых снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптический прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,7. Найти вероятность того, что мишень будет поражена, если стрелок произведет один выстрел из наудачу взятой винтовки.

3. В ящике содержится 12 деталей, изготовленных на заводе №1, 20 деталей — на заводе №2 и 18 деталей— на заводе №3. Вероятность того, что деталь, изготовленная на заводе №1, отличного качества, равна 0,9; для деталей, изготовленных на заводах №2 и №3, эти вероятности соответственно равны 0,6 и 0,9. Найти вероятность того, что извлеченная наудачу деталь окажется отличного качества.

4. В каждой из трех урн содержится 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую урну, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найти вероятность того, что шар, наудачу извлеченный из третьей урны, окажется белым.

5. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих двух шаров наудачу взят один шар. Найти вероятность того, что взят белый шар.

6. В пирамиде 10 винтовок, из которых 4 снабжены оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом, равна 0,95; для винтовки без оптического прицела эта вероятность равна 0,8. Стрелок поразил мишень из наудачу взятой винтовки. Что вероятнее: стрелок стрелял из винтовки с оптическим прицелом или без него?

7. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по тому же шоссе как 3:2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала для заправки машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

1.7 Повторные независимые испытания

Формула Бернулли

Вероятность того, что в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления события равна p событие наступит ровно k раз (безразлично в какой последовательности), равна

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \qquad (20)$$

или

$$P_n(k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k q^{n-k}, \qquad \text{где } q = 1 - p.$$

Число k_0, которому при заданном n соответствует максимальная вероятность $P_n(k_0)$, *называется наивероятнейшим числом появления события A*. При заданных n и p это число определяется неравенствами

$$np - q \le k_0 \le np + p. \quad (21)$$

ЗАДАЧИ

1. Монету бросают 8 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет 3 раза.

2. Монету бросают пять раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет:
   а) менее двух раз;

   б) не менее двух раз.

3. Найти вероятность того, что событие А появится не менее трех раз в четырех независимых испытаниях, если вероятность появления события А в одном испытании равна 0,4.

4. Событие *B* появится в случае, если событие *A* наступит не менее четырех раз. Найти вероятность наступления события *B*, если будет произведено пять независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0,8.

5. Два равносильных противника играют в шахматы. Что вероятнее:
   а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех?

б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

6. В семье пять детей. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51. Найти вероятность того, что среди этих детей:
   а) два мальчика;

   б) не более двух мальчиков;

   в) более двух мальчиков;

   г) не менее двух и не более трех мальчиков.

7. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 30%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий?

8. Отрезок AB разделен точкой C в отношении 2:1. На этот отрезок наудачу брошены четыре точки. Найти вероятность того, что две из них окажутся левее точки C и две — правее. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

9. На отрезок АВ длины а наудачу брошено пять точек. Найти вероятность того, что две точки будут находиться от точки А на расстоянии, меньшем х, а три — на расстоянии, большем х. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

Формула Пуассона

$$P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \text{ где } \lambda = pn \tag{22}$$

получается в результате предельного перехода из формулы Бернулли (20), при условиях

$$p \to 0, \quad n \to \infty, \quad \lambda = pn = const. \tag{23}$$

Приемлемая точность вычислений по формуле Пуассона достигается при *выполнении условий ее практического использования*:

$$p \le 0{,}1; \quad n \ge 100; \quad \lambda \le 10. \tag{24}$$

Пример. *Учебник издан тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит ровно пять бракованных книг.*

Решение. *По условию,* $n = 100\ 000$, $p = 0{,}0001$, $k = 5$. *События, состоящие в том, что книги сброшюрованы неправильно, независимы, число n велико, а вероятность p мала, поэтому воспользуемся распределением Пуассона* (22)

$$\lambda = np = 100\ 000 \cdot 0{,}0001 = 10.$$

Искомая вероятность

$$P_{100\,000}(5) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{10^5}{5!} e^{-10} = \frac{10^5}{120} \cdot 0{,}000045 = 0{,}0375.$$

ЗАДАЧИ

1. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут ровно три элемента.

   Указание. Принять $e^{-2} = 0{,}13534$.

2. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется ровно четыре бракованных.

3. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти вероятности того, что магазин получит разбитых бутылок (принять $e^{-3} = 0{,}04979$):

   а) ровно две;

   б) менее двух

   ;

   в) более двух;

   г) хотя бы одну.

Формулы Муавра-Лапласа

В случае, когда количество испытаний n велико, а условия (24) использования формулы Пуассона не выполняются $0<p<1$, применяют приближенные формулы Муавра-Лапласа, являющиеся следствием центральной предельной теоремы.

Теорема Муавра - Лапласа (локальная)

Вероятность того, что некоторое событие A наступает m раз в $n \gg 1$ испытаниях находят по приближенной формуле

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \text{ где } q = 1 - p, \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}, \qquad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (25)$$

Нормированная функция Гаусса $\varphi(x)$, ее значения представлены в таблице (Приложение 1). Функция Гаусса - четная, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Теорема Муавра - Лапласа (интегральная)

Если производится n независимых опытов, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью p, то для любого интервала (m_1, m_2) справедливо соотношение

$$P_n(m_1 < m < m_2) = \Phi\left(\frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}\right), \qquad (26)$$

где m – число появлений события A в n опытах; $q = 1 - p$,

$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа, значения которой представлены в таблице (Приложение 2). Функция Лапласа - нечетная, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Пример 1. *Вероятность получения положительного результата в каждом отдельном эксперименте будет равна 0,75. Вычислить вероятность того, что в 48 экспериментах - положительный результат будет получен 30 раз.*

Решение. *Используем локальную теорему Муавра – Лапласа, в которой принять n=48; m=30; p=0,75.*

Сначала находим $q = 1 - p = 1 - 0,75 = 0,25.$

Затем находим значение $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{30 - 48 \cdot 0,75}{\sqrt{48 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} = 2.$

По таблице (Приложение 1) находим соответствующее значение функции Гаусса $\varphi(2) = 0,0540.$

Тогда по формуле Муавра-Лапласа (26) *получаем:*

$$P_{48}(30) = \frac{0,0540}{\sqrt{48 \cdot 0,75 \cdot 0,25}} \approx 0,018.$$

Пример2. *На некотором производстве вероятность того, что изделие окажется нестандартным, равна 0,01. Найти вероятность того, что в партии из 1000 изделий окажется не более 12 нестандартных.*

Решение. *Имеем* $m_1 = 0,\ m_2 = 12,\ n = 1000,\ p = 0,01,\ q = 0,99.$

Используем интегральную теорему Лапласа (26)*:*

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{0 - 1000 \cdot 0,01}{\sqrt{1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99}} = \frac{-10}{\sqrt{9,9}} = -\frac{10}{3,1} \approx -3,2;$$

$$x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{12 - 1000 \cdot 0,01}{\sqrt{1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99}} = \frac{2}{\sqrt{9,9}} = \frac{2}{3,1} \approx 0,64.$$

По таблице значений функции Лапласа (Приложение 2) находим, что

$\Phi(x_1) = \Phi(-3,2) = -\Phi(3,2) = -0,49931;$

$\Phi(x_2) = \Phi(0,64) = 0,2389$

Вероятность того, что в партии из 1000 изделий окажется не более 12 нестандартных, с использованием (26)*, равна*

$$P_{1000}(0 < m < 12) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(0,64) - \Phi(-3,2) = 0,2389 + 0,49931 = 0,7382$$

.

ЗАДАЧИ

1. Найти вероятность того, что стрелок из 100 выстрелов попадет в цель 80 раз, если вероятность поражения цели при каждом выстреле равна 0,85.

2. Найти вероятность того, что событие *A* наступит ровно 70 раз в 243 испытаниях, если вероятность появления этого события в каждом испытании равна 0,25.

3. Вероятность наступления события A в одном опыте равна 0,6. Найти вероятность того, что событие A наступит 1400 раз в 2400 опытах.

4. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна 0,8. Найти вероятность того, что событие появится 90 раз.

5. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найдите вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

6. Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий выбракованных будет не более 17?

7. Вероятность получения по лотерее выигрышного билета равна 0,1. Какова вероятность того, что среди 400 наугад купленных билетов не менее 40 и не более 50 выигрышных?

2 Случайные величины

2.1 Случайная величина и ее закон распределения

Случайная величина (СВ) - величина, которая в результате опыта принимает то или иное значение, причем заранее неизвестно, какое именно.

Различают непрерывные СВ (НСВ) и дискретные СВ (ДСВ).

Случайные величины будем обозначать *X,Y,...* а их возможные значения $x_1, x_2, ...;\ \ y_1, y_2, ...$.

Законом распределения (ЗР) случайной величины называется всякое правило, устанавливающее связь между всеми возможными значениями случайной величины и их вероятностями.

ЗР может быть задан в различных формах: ряд и многоугольник распределения для ДСВ, аналитическое и графическое представление плотности распределения для НСВ. Функция распределения является универсальной формой представления ЗР как НСВ, так и ДСВ.

Функция распределения (интегральная) *F(x) СВ X* - вероятность того, что *СВ X* примет значение меньше *x:*

$$F(x) = P(X < x). \tag{27}$$

Основные свойства функции распределения:

1) $0 \le F(x) \le 1$;
2) $F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0$; $F(\infty) = P(X < \infty) = 1$.
3) если $x_2 \ge x_1$, то $F(x_2) \ge F(x_1)$;
4) $P(x_1 \le X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$; (28)

Плотность распределения вероятности СВ $f(x)$ - предел отношения вероятности попадания *СВ* на интервал, содержащий точку *x*, к длине этого интервала, когда $\Delta x \to 0$

$$f(x) = F'(x), \text{ откуда } \quad F(x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \tag{29}$$

Основные свойства плотности вероятности

$$f(x) \ge 0; \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1; \quad P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx. \tag{30}$$

Пример 1. *Дискретная случайная величина X задана рядом распределения*

x_i	2	4	7
p_i	0,5	0,2	0,3

Найти функцию распределения $F(x)$ *и начертить ее график.*

Решение.

$x \le 2, \qquad F(x) = P(X < 2) = 0;$

$2 < x \le 4$, $F(x) = P(X < 4) = F(2) + P(2 \le X < 4) = 0 + 0{,}5 = 0{,}5;$

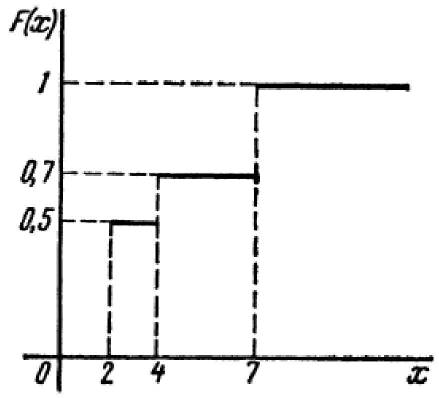
$4 < x \le 7$, $F(x) = P(X < 7) = F(4) + P(4 \le X < 7) = 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7;$

$x > 7$, $\quad F(x) = F(7) + P(X \ge 7) = 0{,}7 + 0{,}3 = 1.$

Итак, искомая функция распределения имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \ x \le 2, \\ 0{,}5 \, при \ 2 < x \le 4, \\ 0{,}7 \, при \ 4 < x \le 7, \\ 1 \quad при \ x > 7. \end{cases}$$

График этой функции приведен на рисунке.



Пример 2. *Задана непрерывная случайная величина X своей функцией плотности распределения f(x).*

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при \quad x \le \pi/4 \\ A\cos 2x, & при \quad -\pi/4 < x \le \pi/4 \\ 0, & при \quad x > \pi/4 \end{cases}$$

Требуется определить коэффициент A, найти функцию распределения, построить графики функции распределения и плотности распределения, определить вероятность того, что случайная величина X попадет в интервал $\left(\frac{\pi}{6}; 2\right)$.

Решение.

Найдем коэффициент A:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{-\pi/4} 0dx + \int_{-\pi/4}^{\pi/4} A\cos 2x dx + \int_{\pi/4}^{\infty} 0dx = \frac{A\sin 2x}{2} \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} = A = 1.$$

Найдем функцию распределения:

$$x \le -\frac{\pi}{4}, \quad F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

$$-\frac{\pi}{4} < x \le \frac{\pi}{4}, \quad F(x) = F(-\pi/4) + \int_{-\pi/4}^{x} \cos 2t dt = \frac{\sin 2t}{2} \Big|_{-\pi/4}^{x} = \frac{\sin 2x}{2} + \frac{1}{2};$$

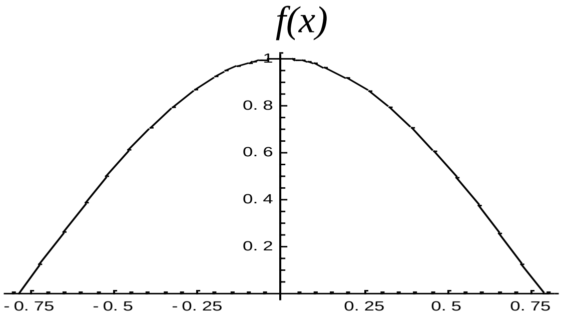
$$x > \frac{\pi}{4}: \quad F(x) = F(\pi/4) + \int_{\pi/4}^{x} 0dt = \frac{\sin 2(\pi/4)}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

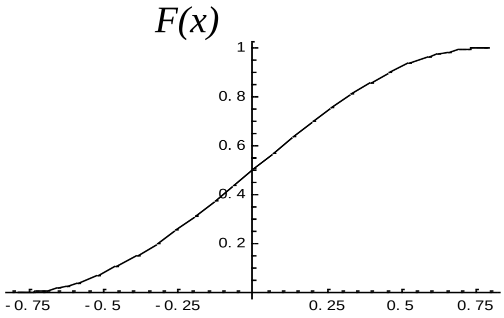
Итак:

$$f(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le \pi/4;\\ \cos 2x, & при \quad -\pi/4<x\le \pi/4;\\ 0, & при \quad x>\pi/4.\end{cases}$$

$$F(x)=\begin{cases}0, & при \quad x\le \pi/4;\\ \dfrac{\sin 2x+1}{2}, & при \quad -\pi/4<x\le \pi/4;\\ 1, & при \quad x>\pi/4.\end{cases}$$

Построим график плотности f(x) и функции F(x) распределения:





Найдем вероятность попадания случайной величины в интервал $\left(\dfrac{\pi}{6};2\right)$*:*

- *через плотность распределения* (30):

$$P\left(\frac{\pi}{6}<x<2\right)=\int_{\pi/6}^{2} f(x)dx=\int_{\pi/6}^{\pi/4}\cos 2x dx+\int_{\pi/4}^{2}0dx=\frac{\sin 2x}{2}\Big|_{\pi/6}^{\pi/4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0{,}067;$$

- *через функцию распределения* (28):

$$P\left(\frac{\pi}{6}<x<2\right)=F(2)-F(\pi/6)=1-\frac{\sin(\pi/3)+1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}=0{,}067.$$

ЗАДАЧИ

1. В партии 20% нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре детали. Написать закон распределения дискретной случайной величины X — числа нестандартных деталей среди четырех отобранных, построить многоугольник и функцию полученного распределения.

2. Вероятность того, что стрелок попадет в мишень при одном выстреле, равна 0,8. Стрелку выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнется. Требуется: а) составить закон распределения дискретной случайной величины X — числа патронов, выданных стрелку; б) найти наивероятнейшее число выданных стрелку патронов; в) построить многоугольник и функцию полученного распределения.

3. Две игральные кости одновременно бросают два раза. Написать закон распределения дискретной случайной величины X—числа выпадений четного числа очков на каждой из двух игральных кости. Построить многоугольник и функцию полученного распределения.

4. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	2	4	5	6
p_i	0,3	0,1	0,2	0,4

Построить многоугольник и функцию распределения.

5. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $\mathrm{F}(x) = 1/2 + (\operatorname{arctg} x)/\pi$. Построить $F(x)$, найти вероятность того, что величина X примет значение, заключенное в интервале (0; 1).

6. Случайная величина X задана на всей оси Ox функцией распределения $\mathrm{F}(x) = (1/2) + (1/\pi)\operatorname{arctg}(x/2)$. Построить $F(x)$. Найти возможное значение x_1, удовлетворяющее условию: с вероятностью 1/6 случайная величина X в результате испытания примет значение, большее x_1.

7. Функция распределения непрерывной случайной величины X - времени безотказной работы некоторого устройства, равна $F(x)=1-e^{-x/T}(x\geq 0)$. Найти вероятность безотказной работы устройства за время $x\geq T$. Построить *F(x)*.

8. Дана функция распределения непрерывной случайной величины X

$$F(x)=\begin{cases}0 & \textit{при } x\leq 0,\\ \sin x & \textit{при } 0<x\leq \pi/2,\\ 1 & \textit{при } x>\pi/2.\end{cases}$$

Найти плотность распределения *f(x)*. Построить *F(x)*, *f(x)*.

9. Непрерывная СВ X в интервале $\left(0,\infty\right)$ задана плотностью распределения $f(x)=\alpha e^{-\alpha x}(\alpha>0);$ вне этого интервала $f\left(x\right)=0$. Построить *f(x)*.Найти вероятность того, что X примет значение, принадлежащее интервалу (1,2).

10.Задана плотность распределения непрерывной случайной величины *X*:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при } x \le 0, \\ \sin x & \textit{при } 0 < x \le \pi / 2, \\ 0 & \textit{при } x > \pi / 2. \end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)*. Построить *F(x)*, *f(x)*.

11.Плотность распределения непрерывной СВ *X* в интервале $(0, \pi / 2)$ равна $f(x) = C \sin x$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти постоянный параметр *C*.

12. Плотность распределения непрерывной случайной величины X задана на всей оси Ox равенством $f(x) = 4C/(e^x + e^{-x})$ Найти постоянный параметр C.

13. Задана плотность распределения непрерывной СВ X:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{\it при} \quad x \le \pi/6, \\ 3\sin 3x, & \text{\it при} \quad \pi/6 < x \le \pi/3, \\ 0, & \text{\it при} \quad x > \pi/3. \end{cases}$$

Найти функцию распределения *F(x)*. Построить *F(x)*, *f(x)*.

2.2 Числовые характеристики случайных величин

Математическое ожидание (МО) СВ - средневзвешенное значение СВ

$$M(X)=\sum_{i=1}^{n} p_i x_i; \qquad M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} x\cdot f(x)dx \tag{31}$$

Свойства МО СВ (здесь С=const):

1) $M(C)=C;$
2) $M(CX)=C\cdot M(X);$ (32)
3) $M(X_1\pm X_2)=M(X_1)\pm M(X_2);$
4) $M(X_1\cdot X_2)=M(X_1)\cdot M(X_2)$ *- только для независимых СВ;*
5) $M(X\pm C)=M(X)\pm C.$

Мода $M_o(X)$ - наиболее вероятное значение СВ, значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения. Если распределение имеет два одинаковых максимума, то его называют бимодальным.

Медиана $M_e(X)$ - значение, при котором функция распределения F(x) равна 1/2. Медиана определяется равенствами

$$F\left[M_e(X)\right]=0{,}5; \qquad P\left[X<M_e(X)\right]=P\left[X>M_e(X)\right].$$

Дисперсией СВ *D(X)* называется средневзвешенный квадрат ее центрированного значения

$$D(X)=M\left((X-a)^2\right), \text{ где } a=M(X).$$

$$D(X)=\begin{cases}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a)^2 p_i, & \text{для ДСВ}\\ \int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 f(x)dx, & \text{для НСВ}\end{cases} \tag{33}$$

Дисперсия СВ обладает следующими свойствами (здесь С=const):

1) $D(C)=0;$
2) $D(CX)=C^2D(X);$
3) $D(X)=M(X^2)-M^2(X);$ (34)
4) $D(X_1\pm X_2)=D(X_1)+D(X_2).$

Среднее квадратическое отклонение (СКО) (стандарт) СВ *X - корень из дисперсии*

$$\sigma(x)=\sqrt{D(x)}. \tag{35}$$

Начальный теоретический момент k-го порядка α_k *- математическое ожидание (средневзвешенное значение)* k*-й степени СВ* $\alpha_k = M\left(X^k\right)$

$$\alpha_k = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i^k; \qquad \alpha_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx \tag{36}$$

Центральный теоретический момент k-го порядка μ_k *- математическое ожидание (средневзвешенное значение)* k*-й степени центрированной СВ* $\mu_k = M\left((X-a)^k\right)$:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} p_i \left(x_i - a\right)^k; \quad \mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} [x-a]^k f(x)\,dx, \text{ где } a = M(X). \tag{37}$$

Очевидно, что $\alpha_1 = M(X)$ - МО есть первый начальный момент;

$\mu_1 = 0$ - первый центральный момент равен нулю;

$\mu_2 = D(X)$ - дисперсия есть второй центральный момент СВ.

Центральные моменты выражаются через начальные по формулам:

$$\mu_2 = \alpha_2 - \alpha_1^2; \quad \mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3; \quad \mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4. \tag{38}$$

ЗАДАЧИ

1. Найти МО, дисперсию и СКО ДСВ *X*, заданной ЗР:

x_i	4,3	5,1	10,6
p_i	0,2	0,3	0,5

2. ДСВ X принимает три возможных значения: $x_1 = 4$ с вероятностью $p_1 = 0,5$; $x_2 = 6$ с вероятностью $p_2 = 0,3$ и x_3 с вероятностью p_3. Найти x_3 и p_3 зная, что $M(X) = 8$.

3. Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины X: $x_1 = -1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, а также известны математические ожидания этой величины и ее квадрата: $M(X) = 0,1$; $M(X^2) = 0,9$. Найти вероятности $p_{1,} p_2, p_3$, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3.

4. Дан перечень возможных значений ДСВ X: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, а также известны МО этой величины и ее квадрата: $M\left(X\right) = 2,3$, $M(X^2) = 5,9$. Найти вероятности, соответствующие возможным значениям X.

5. ДСВ X имеет только два возможных значения: x_1 и x_2, причем $x_2 > x_1$. Вероятность того, что X примет значение x_1, равна 0,6. Найти закон распределения величины X, если математическое ожидание и дисперсия известны: $M(X) = 1,4$; $D(X) = 0,24$.

6. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины Z, если известны математические ожидания и дисперсии X и Y:
   а) $Z = X + 2Y$, $M(X) = 5$, $M(Y) = 3$; $D(X) = 2$, $D(Y) = 5$;

б) $\mathrm{Z} = 3\mathrm{X}\text{-}4\mathrm{Y}$, $M(X) = 2$, $M(Y) = 6$; $\mathrm{D}(\mathrm{X}) = 6$, $\mathrm{D}(\mathrm{Y}) = 9$;

7. НСВ *X* задана плотностью распределении $f(x) = c(x^2 + 2x)$ в интервале (0,1): вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти: а) параметр *c*; б) *M(X)*; в) *D(X)*.

8. Случайная величина задана функцией распределения

$$F(x) = \begin{cases} 1 - x_0^3 / x^3, при\, x \geq x_0\ (x_0 > 0), \\ 0, \qquad\qquad при\, x < x_0. \end{cases}$$

Найти *M(X)*; *D(X)*.и $\sigma(X)$. *Указание.* Найти сначала *f(x)*.

9. Найти моменты 1-го, 2-го и 3-го порядков ДСВ *X*, заданной ЗР:

x_i	2	3	5
p_i	0,1	0,4	0,5

10. НСВ *X* задана плотностью распределения $f(x) = 0{,}5x$ в интервале (0, 2); вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков.

11. Случайная величина X в интервале (2, 4) задана плотностью распределения $f(x) = -(3/4)\,x^2 + (9/2)x - 6$; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти моду, математическое ожидание и медиану величины X.

2.3 Типовые законы распределения случайных величин

Типовые законы распределения случайных величин и их числовые характеристики представлены в приложении 3.

Нормальным называют распределение вероятностей непрерывной случайной величины *X*, плотность которого имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \tag{39}$$

где a — M(X), σ — СКО *X*.

Вероятность того, что *X* примет значение, принадлежащее интервалу (α, β)

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma}\right), \tag{40}$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{\frac{-t^2}{2}} dt$ — функция Лапласа (приложение 2).

Вероятность того, что абсолютная величина отклонения СВ от своего МО меньше положительного числа δ,

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \tag{41}$$

ЗАДАЧИ

1. Плотность равномерного распределения сохраняет в интервале (*a,b*) постоянное значение, равное *C*; вне этого интервала $f(x) = 0$. Найти значение постоянного параметра *C*.

2. Найти МО, дисперсию и СКО случайной величины *X*, распределенной равномерно в интервале (2, 8).

3. Автобусы некоторого маршрута идут строго по расписанию. Интервал движения 5 мин. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередной автобус менее 3 мин.

   Указание. Использовать равномерный ЗР.

4. Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04; б) большая 0,05.

5. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания амперметра округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

6. Закон равномерного распределения задан плотностью вероятности $f(x)=1/(b-a)$ в интервале (a,b); вне этого интервала $f(x)=0$. Найти функцию распределения $F(x)$, построить график, при $a=2;\ b=7$.

7. Равномерно распределенная случайная величинах задана плотностью распределения $f(x)=1/(2l)$ в интервале $(a-l,a+l)$; вне этого интервала $f(x)=0$. Найти математическое ожидание и дисперсию *X*.

8. Нормально распределенная случайная величина X задана плотностью $f(x)=\dfrac{1}{5\sqrt{2\pi}}e^{-(x-1)^2/50}$. Найти МО и дисперсию *X*.

9. Математическое ожидание нормально распределенной случайной величины *X* равно $a=3$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma=2$. Написать плотность вероятности *X*.

10. Случайная величина X подчинена нормальному закону с параметрами $m=0$ и σ. Вероятность попадания этой случайной величины на участок $(-a,a)$ равна 0,5. Найти σ и написать выражение для плотности распределения случайной величины X .

11. Мат. ожидание и СКО нормально распределенной случайной величины *X* соответственно равны 10 и 2. Найти вероятность того, что в результате испытания *X* примет значение, заключенное в интервале (12, 14).

12. Деталь, изготовленная автоматом, считается годной, если отклонение ее контролируемого размера от проектного не превышает 10 мм. Случайные отклонения контролируемого размера от проектного подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$ мм и математическим ожиданием $a = 0$. Сколько процентов годных деталей изготавливает автомат?

13. Автомат штампует детали. Контролируется длина детали X, которая распределена нормально с математическим ожиданием (проектная длина), равным 50 мм. Фактически длина изготовленных деталей не менее 32 и не более 68 мм. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше 55 мм; б) меньше 40 мм.

Указание. Из равенства Р (32 < X < 68) = 1 предварительно найти а.

14. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием $a = 10$. Вероятность попадания X в интервал (10, 20) равна 0,3. Чему равна вероятность попадания X в интервал (0,10)?

15. Случайная величина X распределена нормально с математическим ожиданием а=10 и средним квадратическим отклонением $\sigma = 5$. Найти интервал, симметричный относительно математического ожидания, в который с вероятностью 0,9973 попадет величина X в результате испытания.

16. Случайные ошибки измерения подчинены нормальному закону с $\sigma = 20$ мм и МО $a = 0$. Найти вероятность того, что из трех независимых измерений ошибка хотя бы одного не превзойдет по абсолютной величине 4 мм.

17. Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины X, если известно, что $P\{X < 1\} = 0,1$ и $P\{X > 5\} = 0,2$. Построить кривую распределения и найти ее максимум.

18. **Найти** дисперсию дискретной случайной величины X —числа отказов элемента некоторого устройства в десяти независимых опытах, если вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,9.

19. Производятся независимые испытания с одинаковой вероятностью появления события A в каждом испытании. Найти вероятность появления события A, если дисперсия числа появлений события в трех независимых испытаниях равна 0,63.

20. В партии из 10 деталей содержится три нестандартных. Наудачу отобраны две детали. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X — числа нестандартных деталей среди двух отобранных.

21. **Магазин** получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность. того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна 0,003. Найти: 1) вероятность того, что при перевозке разбитыми окажутся менее 3 бутылок; 2) МО и дисперсию количества разбитых при перевозке бутылок.

22. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету р = 0,01. Сколько нужно купить билетов, чтобы выиграть хотя бы по одному из них с вероятностью $P \geq 0{,}95$?

23. **Производятся** многократные испытания некоторого элемента на надежность до тех пор, пока элемент не откажет. Найти: а) математическое ожидание дискретной случайной величины X—числа опытов, которые надо произвести; б) дисперсию X. Вероятность отказа элемента в каждом опыте равна 0,1.

Воспользоваться геометрическим ЗР.

24. Игральная кость подбрасывается до первого появления цифры 1. Определить M (X) и D (X) для случайной величины X - числа подбрасываний.

25. **Написать** плотность и функцию распределения показательного закона, если параметр $\lambda = 5$.

26. Найти математическое ожидание показательного распределения, заданного при $x \geq 0$:

а) плотностью $f(x) = 5e^{-5x}$;

б) функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0,1x}$.

27. Найти дисперсию и среднее квадратическое отклонение показательного распределения, заданного при $x \geq 0$

а) плотностью вероятности $f(x) = 10e^{-10x}$;

б) функцией распределения $F(x) = 1 - e^{-0,4x}$.

28. Длительность времени безотказной работы элемента имеет показательное распределение $F(t) = 1 - e^{-0,01t}$ (t>0). Найти вероятность того, что за время длительностью t=50 ч:

а) элемент откажет;

б) элемент не откажет.

3 Неравенство Чебышева

Неравенство Чебышева. *Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа* ε *, не меньше, чем* $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$ *:*

$$P\left(\left|X-M(X)\right|<\varepsilon\right)\ge 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}, \quad \text{или} \quad P\left(\left|X-M\left(X\right)\right|\ge\varepsilon\right)\le\frac{D(X)}{\varepsilon^2}. \qquad (42)$$

Задача 1.

Вероятность появления события в каждом испытании равна 1/2. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что число X появлений события заключено в пределах от 40 до 60, если будет произведено 100 испытаний.

Задача 2.

Дискретная случайная величина X задана законом распределения

x_i	3	5	8
p_i	0,1	0,5	0,4

Используя неравенство Чебышева, а также представленный ряд оценить вероятность того, что $|X-M(X)|<2,5$.

4 Двумерные случайные величины

4.1 Закон распределения двумерной СВ

Двумерную величину геометрически можно истолковать как случайную точку $M(X,Y)$ на плоскости *xOy* либо как случайный вектор *OM*.

Функцией распределения вероятностей двумерной случайной величины называют функцию $F(x,y)$, определяющую для каждой пары чисел (x,y) вероятность того, что *X* примет значение, меньшее *x*, и при этом *Y* примет значение, меньшее *y*:

$$F(x,y)=P(X<x,Y<y). \tag{43}$$

Функция распределения обладает следующими свойствами:

1) $0\le F(x,y)\le 1.$

2) $F(x_2,y)\ge F(x_1,y)$, если $x_2>x_1$, $\quad F(x,y_2)\ge F(x,y_1)$, если $y_2>y_1$.

3) $F(-\infty,y)=0,\quad F(x,-\infty)=0,\quad F(-\infty,-\infty)=0,\quad F(\infty,\infty)=1.$

4) $F(x,\infty)=F_1(x);\quad F(\infty,y)=F_2(y).$

5) $P(x_1<X<x_2,y_1<Y<y_2)=\left[F(x_2,y_2)-F(x_1,y_2)\right]-\left[F(x_2,y_1)-F(x_1,y_1)\right].$

Двумерной плотностью вероятности непрерывной двумерной случайной величины называют вторую смешанную производную от функции распределения:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}. \tag{44}$$

Зная плотность распределения, можно найти функцию распределения по формуле

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x} f(x,y)dxdy. \tag{45}$$

Вероятность попадания случайной точки (X,Y) в область *D* определяется равенством

$$P\left[(X,Y)\subset D\right]=\iint_{(D)} f(x,y)dxdy. \tag{46}$$

Свойства двумерной плотности вероятности (вероятности для ДСВ):

1) $f(x,y)\ge 0;\qquad p_{ij}\ge 0;\ \ \forall i,\forall j;$

2) $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dxdy=1;\qquad \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_{ij}=1,\ \ где\ \ p_{ij}=p(X=x_i,Y=y_j).$

Законы распределения составляющих двумерной СВ

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dy; \qquad f_2(y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx \tag{47}$$

$$p_{i,\Sigma}=\sum_{j=1}^{n} p_{ij}=p(X=x_i); \quad p_{\Sigma,j}=\sum_{i=1}^{m} p_{ij}=p(Y=y_j).$$

Условным законом распределения СВ X называют распределение $f_1(x/y)$ этой СВ (плотности ее вероятности для НСВ) при условии, что вторая СВ *Y* принимает некоторое постоянное значение. Аналогично и для второй СВ $f_2(y/x)$. Для совместного распределения имеют место соотношения:

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y/x)=f_2(y)\cdot f_1(x/y);$$

$$p_{ij}=p_{\Sigma,j}\cdot p(x_i/y_j)=p_{i,\Sigma}\cdot p(y_j/x_i), \tag{48}$$

откуда для условных законов распределения имеем, см. (47):

$$f_1(x/y)=f(x,y)/f_2(y); \qquad f_2(y/x)=f(x,y)/f_1(x);$$

$$p(x_i/y_j)=p_{ij}/p_{\Sigma,j}; \qquad p(y_j/x_i)=p_{ij}/p_{i,\Sigma}. \tag{49}$$

Для независимых СВ условные распределения равны безусловным:

$$f_1(x/y)=f_1(x); \quad f_2(y/x)=f_2(y);$$

$$p(x_i/y_j)=p_{i,\Sigma}; \qquad p(y_j/x_i)=p_{\Sigma,j},$$

откуда

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y); \qquad p_{ij}=p_{i,\Sigma}\cdot p_{\Sigma,j}. \tag{50}$$

ЗАДАЧИ

1. Задано распределение вероятностей дискретной двумерной СВ:

Y	X		
	3	10	12
4	*0,17*	*0,13*	*0,25*
5	*0,10*	*0,30*	*0,05*

Найти условные и безусловные законы распределения составляющих X и Y.

2. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-4x})(1-e^{-2y}), \text{при}\, x>0, y>0,\\ 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при}\, x<0, y<0.\end{cases}$$

Найти двумерную плотность вероятности системы *(X,Y)*.

3. Задана функция распределения двумерной случайной величины

$$F(x,y)=\begin{cases}\sin x\cdot\sin y, \text{при}\, 0\le x\le\pi/2, 0\le y\le\pi/2,\\ 0, \qquad\qquad \text{при}\, x<0, y<0.\end{cases}$$

Найти вероятность попадания случайной точки *(X,Y)* в прямоугольник, ограниченный прямыми: $x=0$, $x=\pi/4$, $y=\pi/6$, $y=\pi/3$.

4. Задана двумерная плотность вероятности системы двух случайных величин: $f(x,y)=(1/2)\cdot sin(x+y)$ в квадрате $0\le x\le \pi/2, 0\le y\le \pi 2$; вне квадрата $f(x,y)=0$. Найти функцию распределения системы *(X,Y)*.

5. Задана двумерная плотность вероятности $f(x,y)=\dfrac{C}{\left(9+x^2\right)\left(16+y^2\right)}$ системы *(X,Y)* двух случайных величин. Найти постоянную *C*.

6. Непрерывная двумерная случайная величина (X,Y) распределена равномерно внутри прямоугольника с центром симметрии в начале координат и сторонами *2a* и *2b*, параллельными координатным осям. Найти:
   а) двумерную плотность вероятности системы;

   б) плотности распределения составляющих.

7. Заданы плотности распределения независимых составляющих непрерывной двумерной случайной величины (X,Y):

$$f_1(x) = \begin{cases} 0 & при\, x < 0, \\ 5e^{-5x} & при\, x > 0; \end{cases} \qquad f_2(y) = \begin{cases} 0 & при\, y < 0, \\ 2e^{-2y} & при\, y > 0. \end{cases}$$

Найти: а) плотность совместного распределения системы; б) функцию распределения системы.

8. Задана двумерная плотность вероятности системы случайных величин (X,Y) $f(x,y)=\dfrac{20}{\pi^2(16+x^2)(25+y^2)}$. Найти функцию распределения системы.

9. Система случайных величин (X,Y) подчинена закону распределения с плотностью $f(x,y)=a(x+y)$ в области D и $f(x,y)=0$ вне этой области.

Область D — квадрат, ограниченный прямыми $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=3$.

Требуется:

1) определить коэффициент a;

2) вычислить вероятность попадания случайной точки (X,Y) в квадрат Q, ограниченный прямыми $x=1$, $x=2$, $y=1$, $y=2$;

4.2 Числовые характеристики случайных векторов

Математические ожидания и дисперсии составляющих X и Y двумерной случайной величины (X,Y) (двойные интегралы берутся по области возможных значений системы):

$$M(X)=m_x=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i p_{ij}\,; \qquad M(Y)=m_y=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_j p_{ij}\,; \qquad (51)$$

$$M(X)=m_x=\iint xf(x,y)\,dxdy, \qquad M(Y)=m_y=\iint yf(x,y)\,dxdy;$$

$$D(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)^2 p_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i^{\,2}p_{ij}-m_x^{\,2};$$

$$D(Y)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(y_j-m_y)^2 p_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}y_j^{\,2}p_{ij}-m_y^{\,2}; \qquad (52)$$

$$D(X)=\iint(x-m_x)^2 f(x,y)\,dxdy=\iint x^2 f(x,y)\,dxdy-m_x^{\,2};$$

$$D(Y)=\iint(y-m_y)^2 f(x,y)\,dxdy=\iint y^2 f(x,y)\,dxdy-m_y^{\,2}.$$

Корреляционным моментом μ_{xy} системы (X,Y) называют центральный момент $\mu_{1,1}$ порядка 1+1:

$$\mu_{xy}=M\left[(X-m_x)(Y-m_y)\right];$$

$$\mu_{xy}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(x_i-m_x)(y_j-m_y)p_{ij}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_i y_j p_{ij}-m_x m_y; \qquad (53)$$

$$\mu_{xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x-m_x)(y-m_y)f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyf(x,y)\,dxdy-m_x m_y. \qquad (54)$$

Коэффициент корреляции величин X и Y:

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}, \qquad |r_{xy}|\le 1. \qquad (55)$$

4.3 Нормальный закон распределения на плоскости

Нормальный закон распределения на плоскости имеет следующую плотность распределения вероятностей двумерной случайной величины (*X*, *Y*)

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}}e^{-\frac{1}{2\left(1-r_{xy}^2\right)}\left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2}+\frac{\left(y-m_y\right)^2}{\sigma_y^2}-2r_{xy}\frac{(x-m_x)}{\sigma_x}\cdot\frac{\left(y-m_y\right)}{\sigma_y}\right)} \quad (56)$$

Таким образом, нормальный закон на плоскости определяется 5 параметрами: m_x, m_y, σ_x, σ_y, r_{xy}, где m_x, m_y – математические ожидания, σ_x, σ_y – средние квадратические отклонения, r_{xy} – коэффициент корреляции *X* и *Y*.

Можно показать, что *для нормального ЗР понятия некоррелированности и независимости равносильны,* т.е. при $r_{xy}=0 \quad f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

При $r_{xy}\neq 0$ случайные величины зависимы, а их условные ЗР также имеют нормальные распределения:

$$f_2\left(y/x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_{y/x}}e^{-\frac{1}{2\sigma_{y/x}^2}\left(y-m_{y/x}\right)^2}, \quad (57)$$

$$f_1\left(x/y\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_{x/y}}e^{-\frac{1}{2\sigma_{x/y}^2}\left(y-m_{x/y}\right)^2} \quad (58)$$

где

$$\sigma_{y/x}=\sigma_y\sqrt{1-r_{xy}^2}\,, \qquad \sigma_{x/y}=\sigma_x\sqrt{1-r_{xy}^2} \quad (59)$$

- условные СКО случайных величин *X* и *Y* соответственно;

$$m_{y/x}=m_y+r_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x-m_x\right), \qquad m_{x/y}=m_x+r_{xy}\frac{\sigma_x}{\sigma_y}\left(y-m_y\right) \quad (60)$$

- условное математические ожидания величин *X* и *Y* соответственно.

Последние выражения показывают, что в условном ЗР, например, величины *Y* при фиксированном *X*=*x* от этого значения *зависит только математическое ожидание, но не дисперсия*.

Уравнения условных математических ожиданий $m_{y/x}$, $m_{x/y}$ (60) можно представить на плоскости линиями, которые называются ***линиями регрессии***.

Для нормального ЗР на плоскости *линии регрессии являются прямыми*, которые пересекаются в центре рассеивания (m_x, m_y).

ЗАДАЧИ

1. В двух ящиках находятся по шесть шаров; в первом ящике: один шар — с № 1, два шара — с № 2, три шара — с № 3; во втором ящике: два шара — с № 1, три шара — с № 2, один шар — с № 3. Пусть X — номер шара, вынутого из первого ящика, Y — номер шара, вынутого из второго ящика. Из каждого ящика вынули по шару. Составить таблицу закона распределения системы случайных величин (X,Y).

2. Найти математические ожидания случайных величин X и Y по условию предыдущей задачи.

3. Найти дисперсии случайных величин X и Y по условию задачи 1.

4. Найти коэффициент корреляции по условию задачи 1.

5. Дана таблица, определяющая закон распределения системы двух случайных величин (X,Y):

X \ Y	20	40	60
10	3λ	λ	0
20	2λ	4λ	2λ
30	λ	2λ	5λ

Найти: 1) коэффициент λ; 2) математические ожидания m_x и m_y; 3) дисперсии σ_x^2 и σ_y^2; 4) коэффициент корреляции $r_{x,y}$.

6. Система двух случайных величин (X, Y) подчинена нормальному закону распределения с плотностью $f(x, y) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi} \exp\left(-\frac{2}{3}\left(4x^2 + 6xy + 9y^2\right)\right)$.

Найти числовые характеристики, получить и построить на плоскости линии регрессии.

Контрольная работа №1 "Случайные события" (типовые варианты)

ВАРИАНТ № 1

1. Из 10 роз и 8 георгинов нужно составить букет, содержащий 2 розы и 3 георгина. Сколько можно составить различных букетов?

2. Из колоды в 52 карты извлекаются наудачу 4 карты. Найти вероятности следующих событий: $A=\{$в полученной выборке все карты бубновой масти$\}$, $B=\{$в полученной выборке окажется хотя бы один туз$\}$.

3. Вероятность хотя бы одного попадания стрелком в мишень при четырех выстрелах равна 0,9919. Найти вероятность попадания при одном выстреле.

4. По каналу связи передается одна из трех последовательностей букв: AAAA, BBBB или CCCC, вероятности которых равны соответственно 0,3, 0,4 и 0,3. Буква принимается правильно с вероятностью 0,6; вероятность ее приема за другую — 0,2 и 0,2 (буквы искажаются независимо друг от друга). Найти вероятность того, что передано AAAA, если получено ABCA.

5. Отрезок AB, длина которого 60 см, разделен точкой C в отношении 3:1. На этот отрезок наудачу брошены пять точек. Найти вероятность того, что три из них окажутся левее точки C и две — правее. Предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

6. Найти вероятность того, что в 10 испытаниях по схеме Бернулли с вероятностью успеха 0,4 появятся 6 успехов, причем 3 из них в трех последних испытаниях.

ВАРИАНТ № 2

1. Множество E содержит 11 первых букв русского алфавита. Сколько различных алфавитов из трех букв можно составить из данного множества букв? Какова вероятность того, что случайно выбранный алфавит будет содержать букву a?

2. В лотерее выпущено n билетов, из которых m выигрышные. Куплено k билетов. Найти вероятность того, что из k билетов хотя бы один выигрышный.

3. Вероятность одного попадания в цель при одном залпе из двух орудий равна 0,46. Найти вероятность поражения цели при одном выстреле первым из орудий, если известно, что для второго орудия эта вероятность равна 0,6.

4. Известно, что 5% всех мужчин и 0,25% всех женщин дальтоники. Наугад выбранное лицо страдает дальтонизмом. Какова вероятность того, что это мужчина? (Считать, что мужчин и женщин одинаковое число.)

5. На отрезке $[0,5]$ наудачу поставлены две точки, разбившие его на три отрезка. Найти вероятность того, что из этих отрезков можно построить треугольник.

6. В урне 18 белых и 9 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется два белых?

ВАРИАНТ № 3

1. Сколькими способами можно выбрать 12 человек из 17-ти, если данные два человека не могут быть выбраны вместе?

2. Из колоды в 52 карты извлекаются наудачу 4 карты. Найти вероятность того, что будет получен следующий состав: валет, дама и два короля.

3. Вероятность того, что наудачу названный студент сдаст первый экзамен, равна 0,9, второй экзамен — 0,8 и третий — 0,7. Найти вероятность того, что студент сдаст хотя бы один экзамен, считая экзамены независимыми друг от друга.

4. В первой урне 2 белых и 4 черных шара, а во второй — 3 белых и 1 черный шар. Из первой урны во вторую переложили два шара, а затем из второй урны вынули наугад один шар. Определить вероятность того, что вынутый шар — белый.

5. Какова вероятность того, что сумма трех наудачу взятых отрезков, длина каждого из которых не превосходит l, будет больше l?

6. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей — три девочки и два мальчика. Вероятности рождения мальчика и девочки предполагаются одинаковыми.

ВАРИАНТ № 4

1. В теннисном турнире участвуют 10 мужчин и 6 женщин. Сколькими способами можно составить четыре смешанные пары?

2. В лотерее выпущено n билетов, из которых m выигрышные. Куплено k билетов. Найти вероятность того, что из k билетов ровно один выигрышный.

3. В первом ящике 1 белый, 2 красных и 3 синих шара; во втором — 2 белых, 6 красных, 4 синих шара. Из каждого ящика вынули по шару. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров нет синих?

4. Производится серия независимых выстрелов зажигательными снарядами по резервуару с горючим. Каждый снаряд попадает в резервуар с вероятностью p. Если в резервуар попадает один снаряд, то горючее воспламеняется с вероятностью p_1, если два снаряда, — с полной достоверностью. Найти вероятность того, что при n выстрелах горючее воспламенится.

5. Найти вероятность того, что монета радиусом 2 см, брошенная на бесконечную шахматную доску с клетками шириной 5 см, пересечет не более одной стороны клетки.

6. В классе 20 мальчиков и 10 девочек. На каждый из трех вопросов, заданных учителем, ответили по одному ученику. Какова вероятность того, что среди ответивших было два мальчика и одна девочка?

Контрольная работа №2 "Случайные величины" (типовые варианты)

ВАРИАНТ № 1

1) В каждом из двух таймов футбольного матча обе команды вместе забивают три мяча с вероятностью 0,2, два мяча — с вероятностью 0,2, один мяч — с вероятностью 0,3 и с вероятностью 0,3 не забивают мячей. Найти математическое ожидание общего числа забитых в матче мячей.
2) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & -3<x<0, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (–1; 1).
3) Найти математическое ожидание и дисперсию нормально распределенной случайной величины X, если известно, что $P\{X<1\}=0{,}1$ и $P\{X>5\}=0{,}2$. Построить кривую распределения и найти ее максимум.

ВАРИАНТ № 2

1) В каждом из двух таймов футбольного матча обе команды вместе забивают три мяча с вероятностью 0,1, два мяча — с вероятностью 0,2, один мяч — с вероятностью 0,4 и с вероятностью 0,3 не забивают мячей. Определить закон распределения и дисперсию общего числа забитых в матче мячей.
2) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 2, \\ ax^{-9/2}, & x>2. \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (3; 4).
3) Независимые случайные величины $X_1, X_2, \ldots, X_8$ имеют нормальный закон распределения с параметрами $m=1$, $\sigma=\sqrt{2}$. Рассматривается случайная величина $Y=X_1+X_2+\ldots+X_8$. С помощью неравенства Чебышева оценить вероятности $P\{3<Y<13\}$, $P\{|Y-8|>8\}$.

ВАРИАНТ № 3

1) Из полного набора костей домино наугад выбираются две. Найти закон распределения и математическое ожидание количества появлений цифры «4» на выбранных костях.
2) Плотность вероятности непрерывной случайной величины X имеет вид:

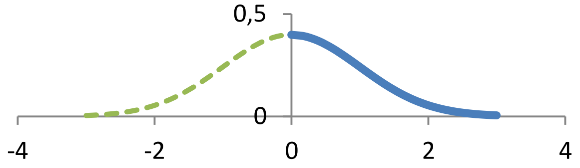
$$f(x)=\begin{cases} ax(4-x), & 1<x<4, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

а) Найти значение параметра a. б) Построить график функции распределения $F(x)$. в) Найти $M(X)$, $D(X)$ и $\sigma(X)$. г) Найти вероятность того, что случайная величина X примет значения из интервала (3; 5).
3) Случайная величина X имеет нормальный закон распределения. Известно, что $M(X)=-2$, $D(X)=1$. Найти: а) плотность вероятности случайной величины X и ее значения в точках $x=-1$, $x=0$, $x=2$; б) вероятности $P\{-2<X<0\}$, $P\{X>1\}$.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1 - Нормированная функция Гаусса $\varphi(x)$

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\varphi(-x)=\varphi(x)$$

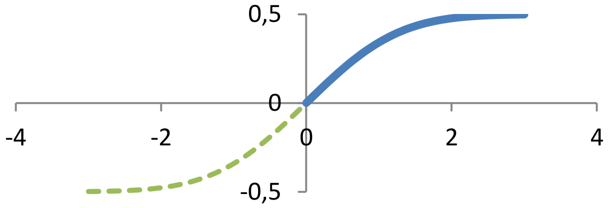


x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	x
0,0	**0,3989**	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973	**0,0**
0,1	3970	3965	3961	3856	3951	3945	3939	3932	3925	3918	**0,1**
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	**0,2**
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697	**0,3**
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	**0,4**
0,5	**0,3521**	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352	**0,5**
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144	**0,6**
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	**0,7**
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685	**0,8**
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	**0,9**
1,0	**0,2420**	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203	**1,0**
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2021	1989	1965	**1,1**
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	**1,2**
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	**1,3**
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	**1,4**
1,5	**0,1295**	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127	**1,5**
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957	**1,6**
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804	**1,7**
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0631	0669	**1,8**
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	**1,9**
2,0	**0,0540**	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449	**2,0**
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363	**2,1**
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	**2,2**
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0299	**2,3**
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180	**2,4**
2,5	**0,0175**	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0134	0139	**2,5**
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107	**2,6**
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	**2,7**
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	**2,8**
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	**2,9**
3,0	**0,0044**	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034	**3,0**
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025	**3,1**
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	**3,2**
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013	**3,3**
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	**3,4**
3,5	**0,0009**	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006	**3,5**
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	**3,6**
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	**3,7**
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002	**3,8**
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	**3,9**

ПРИЛОЖЕНИЕ 2 - Нормированная функция Лапласа *Ф(t)*

$$\Phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

$$\Phi(-t)=-\Phi(t);\ 0\le\Phi(t)\le\frac{1}{2};$$



t	*Ф(t)*	*t*	*Ф(t)*	*t*	*Ф(t)*	*t*	*Ф(t)*
0,00	0,000000	***0,32***	0,125516	***0,64***	0,238914	***0,96***	0,331472
0,01	0,003989	***0,33***	0,129300	***0,65***	0,242154	***0,97***	0,333977
0,02	0,007978	***0,34***	0,133072	***0,66***	0,245373	***0,98***	0,336457
0,03	0,011966	***0,35***	0,136831	***0,67***	0,248571	***0,99***	0,338913
0,04	0,015953	***0,36***	0,140576	***0,68***	0,251748	***1,00***	0,341345
0,05	0,019939	***0,37***	0,144309	***0,69***	0,254903	***1,01***	0,343752
0,06	0,023922	***0,38***	0,148027	***0,70***	0,258036	***1,02***	0,346136
0,07	0,027903	***0,39***	0,151732	***0,71***	0,261148	***1,03***	0,348495
0,08	0,031881	***0,40***	0,155422	***0,72***	0,264238	***1,04***	0,350830
0,09	0,035856	***0,41***	0,159097	***0,73***	0,267305	***1,05***	0,353141
0,10	0,039828	***0,42***	0,162757	***0,74***	0,270350	***1,06***	0,355428
0,11	0,043795	***0,43***	0,166402	***0,75***	0,273373	***1,07***	0,357690
0,12	0,047758	***0,44***	0,170031	***0,76***	0,276373	***1,08***	0,359929
0,13	0,051717	***0,45***	0,173645	***0,77***	0,279350	***1,09***	0,362143
0,14	0,055670	***0,46***	0,177242	***0,78***	0,282305	***1,10***	0,364334
0,15	0,059618	***0,47***	0,180822	***0,79***	0,285236	***1,11***	0,366500
0,16	0,063559	***0,48***	0,184386	***0,80***	0,288145	***1,12***	0,368643
0,17	0,067495	***0,49***	0,187933	***0,81***	0,291030	***1,13***	0,370762
0,18	0,071424	***0,50***	0,191462	***0,82***	0,293892	***1,14***	0,372857
0,19	0,075345	***0,51***	0,194974	***0,83***	0,296731	***1,15***	0,374928
0,20	0,079260	***0,52***	0,198468	***0,84***	0,299546	***1,16***	0,376976
0,21	0,083166	***0,53***	0,201944	***0,85***	0,302337	***1,17***	0,379000
0,22	0,087064	***0,54***	0,205401	***0,86***	0,305105	***1,18***	0,381000
0,23	0,090954	***0,55***	0,208840	***0,87***	0,307850	***1,19***	0,382977
0,24	0,094835	***0,56***	0,212260	***0,88***	0,310570	***1,20***	0,384930
0,25	0,098706	***0,57***	0,215661	***0,89***	0,313267	***1,21***	0,386861
0,26	0,102568	***0,58***	0,219043	***0,90***	0,315940	***1,22***	0,388768
0,27	0,106420	***0,59***	0,222405	***0,91***	0,318589	***1,23***	0,390651
0,28	0,110261	***0,60***	0,225747	***0,92***	0,321214	***1,24***	0,392512
0,29	0,114092	***0,61***	0,229069	***0,93***	0,323814	***1,25***	0,394350
0,30	0,117911	***0,62***	0,232371	***0,94***	0,326391		
0,31	0,121720	***0,63***	0,235653	***0,95***	0,328944		

Продолжение приложения 2

t	Φ(t)	t	Φ(t)	t	Φ(t)	t	Φ(t)
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	0,4938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,S6	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499999

$$P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - m_x}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - m_x}{\sigma_x}\right);$$

$$P(|X - m_x| < \alpha) = \Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_x}\right) - \Phi\left(\frac{-\alpha}{\sigma_x}\right) = 2\Phi\left(\frac{\alpha}{\sigma_x}\right).$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3. Типовые законы распределения случайных величин

Закон распределения	**P(X), f(x)**	**F(x)**	$M(X)=m_x$; $D(X)=D_x$
Биномиальный	$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $q=1-p$		$m_x=np$; $D_x=npq$
Пуассона	$P_n(k)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$, $\lambda=np$		$m_x=\lambda$; $D_x=\lambda$
Геометрический	$P(k)=pq^{k-1}$, $q=1-p$		$m_x=\dfrac{1}{p}$; $D_x=\dfrac{q}{p^2}$
Равномерный	$f(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \dfrac{1}{(b-a)}, & a\le x\le b \\ 0, & x>b \end{cases}$	$F(x)=\begin{cases} 0, & x<a \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b \\ 1, & x>b \end{cases}$	$m_x=\dfrac{a+b}{2}$; $D_x=\dfrac{(b-a)^2}{12}$
Нормальный (Гаусса)	$f(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$	$F(x)=\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt$	$m_x=a$; $D_x=\sigma^2$
Показательный (экспоненциальный)	$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \end{cases}$, $\lambda>0$	$F(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 1-e^{-\lambda x}, & x\ge 0 \end{cases}$; $R(t)=1-F(t)=e^{-\lambda t}$.	$m_x=\dfrac{1}{\lambda}$; $D_x=\dfrac{1}{\lambda^2}$

ПРИЛОЖЕНИЕ 4. Таблица основных интегралов

1. $\int u^a du = \frac{u^{a+1}}{a+1} + C \qquad (a \neq -1) \qquad \left(\int du = u + C\right);$

2. $\int \frac{du}{u} = ln|u| + C;$

3. $\int a^u du = \frac{a^u}{ln\,a} + C; \qquad \int e^u du = e^u + C;$

4. $\int sin\,udu == -cos\,u + C \qquad \left(\int shu \cdot du = chu + C\right);$

5. $\int cos\,udu = sin\,u + C \qquad \left(\int chu \cdot du = shu + C\right);$

6. $\int tgudu = -ln|cos\,u| + C;$

7. $\int ctgudu = ln|sin\,u| + C;$

8. $\int \frac{du}{cos^2 u} = tgu + C \qquad \left(\int \frac{du}{ch^2 u} = thu + C\right);$

9. $\int \frac{du}{sin^2 u} = -ctgu + C \qquad \left(\int \frac{du}{sh^2 u} = -cthu + C\right);$

10. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = arc\,sin\frac{u}{a} + C;$

11. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C;$

12. $\int \frac{du}{a^2 + u^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{u}{a} + C;$

13. $\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \cdot ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C;$

14. $\int \frac{du}{sin\,u} = ln\left|tg\frac{u}{2}\right| + C;$

15. $\int \frac{du}{cos\,u} = ln\left|tg\left(\frac{u}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C;$

16. $\int \sqrt{a^2 - u^2} du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2} arcsin\frac{u}{a} + C.$

ЛИТЕРАТУРА

1. **Вентцель Е.**С. Теория вероятностей: учебник для студентов вузов. – 10 изд. – М.: Издательский центр «Академия», 2005. – 576с.

2. **Гмурман В.Е.** Теория вероятностей и математическая статистика: уч. пособие. – 12-е изд. – М.: Высшее образование, 2008. - 479с.

3. **Кремер Н.Ш.** Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. - 543с.

4. **Гмурман В.Е.** Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: уч. пособие для студентов вузов. – 4-е изд. – М.: Высшая школа, 1997. - 400с.

5. **Письменный Д.Т.** Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам. – 3-е изд. – М.: Айрис-пресс, 2008. – 288с.

6. **Гулай Т.А., Долгополова А.Ф., Литвин Д.Б., Мелешко С.В.** Теория вероятностей и математическая статистика. - 2-е изд. - Ставрополь : Агрус, 2013. - 256с.

7. **Литвин Д.Б., Мелешко С.В.** Элементы теории вероятностей: Учебное пособие. – Ставрополь: Сервисшкола, 2017. – 86 с.

Публикуется в авторской редакции

Подписано в печать 29.08.2019. Бумага офсетная. Гарнитура "Times".
Формат 60×84/16. Усл. печ. л.4,65. Тираж 255 экз. Заказ №14.

Отпечатано с готового оригинал-макета в типографии "АГРУС" Ставропольского ГАУ, Ставрополь, ул. Пушкина,15. тел. 35-06-94.